УДК 519.6

О.М. Литвин, Ю.І. Першина
Українська інженерно-педагогічна академія, м. Харків, Україна
Україна, 61003, м. Харків, вул. Університетська, 16, *academ@kharkov.ua, yulia_pershina@mail.ru*

Відновлення розривних функцій розривними апроксимаційними сплайнами з використанням трапецієподібних елементів

O.N. Lytvyn, Y.I. Pershina
Ukrainian Engineering and Pedagogical Academy
Ukraine, 61003, Kharkiv, Universytetska St., 16

Restoration of Discontinuous Functions by Discontinuous Approximational Splines with Use of Trapezes Elements

О.Н. Литвин, Ю.И. Першина
Украинская инженерно-педагогическая академия, г. Харьков, Украина
Украина, 61003, г. Харьков, ул. Университетская, 16

Восстановление разрывных функций разрывными аппроксимационными сплайнами с использованием трапецевидных элементов

У статті побудований розривний апроксимаційний сплайн, коефіцієнти якого знаходяться методом найменших квадратів, для наближення розривної функції двох змінних з областю визначення, що можна розбити на прямокутні трапеції. Запропонований метод наближення можна буде використати для математичного моделювання розривних процесів в медичних, геологічних, космічних та інших дослідженнях.
Ключові слова: розривна функція, розривний апроксимаційний сплайн, трапецевидний елемент метод найменших квадратів, томографія.

In the article it is constructed discontinuous approximational spline, which coefficients are found by the method of the least squares, for approach of function of two variables with a range of definition, which can be broken into rectangular trapezes. The offered method can be used for mathematical modelling of explosive processes in medical, geological, space and other researches.
Key words: discontinuous function, discontinuous approximational spline, method of the least squares, tomography.

В статье построен разрывный аппроксимационный сплайн, коэффициенты которого находятся методом наименьших квадратов, для приближения функции двух переменных с областью определения, которую можно разбить на прямоугольные трапеции. Предложенный метод можно использовать для математического моделирования разрывных процессов в медицинских, геологических, космических и других исследованиях.
Ключевые слова: разрывная функция, разрывный аппроксимационный сплайн, метод наименьших квадратов, томография

Вступ

Задача наближення неперервних функцій неперервними сплайнами з достатньою повнотою описана в багатьох роботах вітчизняних та зарубіжних дослідників [1-3].

У вказаних роботах досліджувалося наближення неперервних функцій за допомогою неперервних та розривних сплайнів. Але загальної теорії таких наближень не існує.

Задачі наближення розривних функцій виникають частіше, ніж задачі наближення неперервних функцій. Наприклад, в методах комп'ютерної томографії на даний час ніде не використовується інформація про внутрішню структуру тіла людини (шлунок має одну форму і відповідну щільність його тканин, печінка має іншу форму та іншу щільність тканин тощо); при дослідженні кори Землі за допомогою даних з кернів свердловинного буріння виникає задача відновлення внутрішньої структури кори між свердловинами. При цьому очевидним є той факт, що щільність ґрунту в різних точках кори є неоднорідною і найчастіше має розриви першого роду в точках поверхонь, які відділяють одну складову кори від іншої (чорнозем, пісок, глина, граніт тощо). Тобто актуальною є розробка та дослідження теорії наближення розривних функцій за допомогою розривних функцій.

У статті [4] авторами були побудовані розривні лінійні інтерполяційні сплайни для наближення функцій однієї змінної, що може мати розриви першого роду. У роботі [5] був запропонований метод наближення розривних функцій двох змінних розривними інтерполяційними білінійними сплайнами, а в роботі [6] – інтерлінаційними розривними сплайнами. Були також побудовані розривні інтерлінаційні сплайни для наближення функцій двох змінних, область визначення яких розбивається на прямокутні трикутники [7]. У статті [8] запропонований метод відновлення розривних функцій двох змінних, з використанням трапецієподібних елементів.

У даній роботі будуються та досліджуються апроксимаційні розривні сплайни для відновлення розривних функцій з областю визначення, що розбивається на прямокутні трапеції.

Постановка задачі. Нехай задана розривна функція двох змінних $f(x,y)$ в області $D=[0,1]^2$. Будемо вважати, що її область розбита на прямокутні. Трапеції не вкладаються одна в одну, а їх сторони не перетинаються. Функція $f(x,y)$ має розриви першого роду на границях між цими трапеціями (не обов'язково між всіма).

Потрібно побудувати апроксимаційний розривний сплайн для заданої розривної функції $f(x,y)$.

Побудови розривного апроксимаційного сплайна

Якщо (x_i, y_j) – вузол, в якому знаходиться прямий кут прямокутника, то може зустрітися чотири типи трапецій (рис. 1):

$$\mathrm{TP}_{ij}^{(1)} = \left\{ x_i < x < x_{i+1}, y_j < y < g_{j+1}^{(1)}(x) \right\};\ \mathrm{TP}_{ij}^{(5)} = \left\{ x_i < x < q_{i+1}^{(5)}(y), y_j < y < y_{j+1} \right\};$$

$$\mathrm{TP}_{ij}^{(2)} = \left\{ x_{i-1} < x < x_i, y_j < y < g_{j+1}^{(2)}(x) \right\};\ \mathrm{TP}_{ij}^{(6)} = \left\{ q_{i-1}^{(6)}(y) < x < x_i, y_j < y < y_{j+1} \right\};$$

$$\mathrm{TP}_{ij}^{(3)} = \left\{ x_{i-1} < x < x_i, g_{j-1}^{(3)}(x) < y < y_j \right\};\ \mathrm{TP}_{ij}^{(7)} = \left\{ q_{i-1}^{(7)}(y) < x < x_i, y_{j-1} < y < y_j \right\}$$

$$\mathrm{TP}_{ij}^{(4)} = \left\{ x_i < x < x_{i+1}, g_{j-1}^{(4)}(x) < y < y_j \right\};\ \mathrm{TP}_{ij}^{(8)} = \left\{ x_i < x < q_{i+1}^{(8)}(x), y_{j-1} < y < y_j \right\}$$

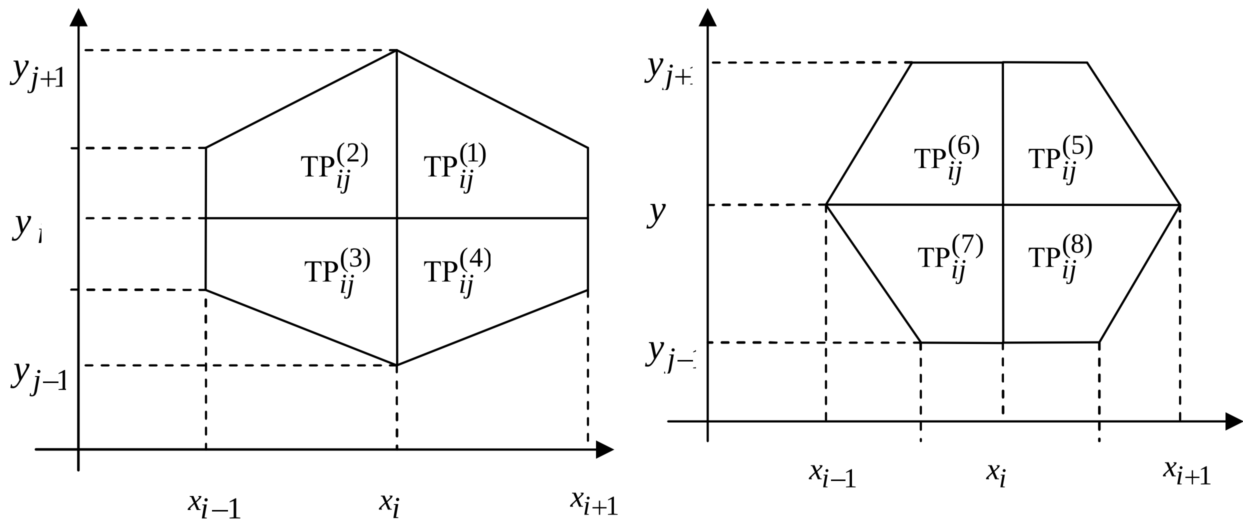


Рисунок 1 – Зображення можливих трапецієподібних елементів з прямим кутом у вузлі (x_i, y_j)

Вважаємо, що на кожній зі сторін заданих трапецій функція $f(x, y)$ може мати (а може і не мати) розриви першого роду.

Визначення. Будемо називати розривним апроксимаційним поліноміальним сплайном в області $\mathrm{TP}_{ij}^{(k)} \subset D$, $k = \overline{1,8}$ таку функцію:

$$S(x,y) = s_{ij}^{(k)}(x,y) = C_1^{(k)} \frac{\omega 4_{ij}^{(k)}(x,y)}{\omega 4_{ij}^{(k)}(A_1^{(k)})} \frac{\omega 3_{ij}^{(k)}(x,y)}{\omega 3_{ij}^{(k)}(A_1^{(k)})} + C_2^{(1)} \frac{\omega 2_{ij}^{(k)}(x,y)}{\omega 2_{ij}^{(k)}(A_2^{(k)})} \frac{\omega 3_{ij}^{(k)}(x,y)}{\omega 3_{ij}^{(k)}(A_2^{(k)})} +$$

$$+ C_3^{(1)} \frac{\omega 1_{ij}^{(k)}(x,y)}{\omega 1_{ij}^{(k)}(A_3^{(k)})} \frac{\omega 4_{ij}^{(k)}(x,y)}{\omega 4_{ij}^{(k)}(A_3^{(k)})} + C_4^{(1)} \frac{\omega 1_{ij}^{(k)}(x,y)}{\omega 1_{ij}^{(k)}(A_4^{(k)})} \frac{\omega 2_{ij}^{(k)}(x,y)}{\omega 2_{ij}^{(k)}(A_4^{(k)})}, (x,y) \in \mathrm{TP}_{ij}^{(k)}, \; k = \overline{1,8}, \qquad (1)$$

де

$$\omega 1_{ij}^{(k)}(x,y) = y - y_j, \qquad \omega 2_{ij}^{(k)}(x,y) = x - x_i,$$

$$\omega 3_{ij}^{(k)}(x,y) = \begin{cases} y - g^{(k)}(x), & k = \overline{1,4} \\ y - y_{j+1}, & k = \overline{5,8} \end{cases}, \quad \omega 4_{ij}^{(k)}(x,y) = \begin{cases} x - x_{i+1}, & k = \overline{1,4} \\ x - q^{(k)}(y), & k = \overline{5,8} \end{cases},$$

$$A_1^{(k)} = (x_i, y_j), \; A_2^{(k)} = \begin{cases} (x_{i+1} - 0, y_j + 0), & k = 1 \\ (x_{i-1} - 0, y_j + 0), & k = 2 \\ (x_{i-1} - 0, y_j - 0), & k = 3 \\ (x_{i+1} - 0, y_j - 0), & k = 4 \\ (q_{i+1}^{(5)}(y_j) - 0, y_j + 0), & k = 5, \\ (q_{i-1}^{(6)}(y_j) + 0, y_j + 0), & k = 6 \\ (q_{i-1}^{(7)}(y_j) - 0, y_j - 0), & k = 7 \\ (q_{i+1}^{(8)}(y_j) - 0, y_j - 0), & k = 8 \end{cases}, \; A_3^{(k)} = \begin{cases} (x_i + 0, g_{j+1}^{(1)}(x_i) - 0, & k = 1 \\ (x_i - 0, g_{j+1}^{(2)}(x_i) - 0), & k = 2 \\ (x_i - 0, g_{j-1}^{(3)}(x_i) + 0), & k = 3 \\ (x_i + 0, g_{j-1}^{(4)}(x_i) + 0), & k = 4, \\ (x_i + 0, y_{j+1} - 0), & k = 5 \\ (x_i - 0, y_{j+1} - 0), & k = 6 \\ (x_i - 0, y_{j-1} + 0), & k = 7 \\ (x_i + 0, y_{j-1} + 0), & k = 8 \end{cases}$$

$$A_4^{(k)} = \begin{cases} (x_{i+1}-0, g_{j+1}^{(1)}(x_{i+1})-0, & k=1 \\ (x_{i-1}+0, g_{j+1}^{(2)}(x_{i-1})-0), & k=2 \\ (x_{i-1}+0, g_{j-1}^{(3)}(x_{i-1})+0), & k=3 \\ (x_{i+1}-0, g_{j-1}^{(4)}(x_{i+1})+0), & k=4 \\ (q_{i+1}^{(5)}(y_{j+1})-0, y_{j+1}-0), & k=5 \\ (q_{i-1}^{(6)}(y_{j+1})+0, y_{j+1}-0), & k=6 \\ (q_{i-1}^{(7)}(y_{j-1})+0, y_{j-1}+0), & k=7 \\ (q_{i+1}^{(8)}(y_{j-1})-0, y_{j-1}+0), & k=8 \end{cases}$$

а коефіцієнти $C_i^{(j)}, i, j=\overline{1,4}$ сплайна знаходяться методом найменших квадратів з умови

$$\iint\limits_{\mathrm{TP}_{ij}^{(k)}} (f(x,y)-S(x,y))^2 dxdy \to \min_C \qquad (2)$$

Теорема. Для оператора наближення розривної функції $f(x,y)\in C^{(2,2)}(\mathrm{TP}_{ij}^{(1)})$ розривним апроксимаційним сплайном $S(x,y)$ вигляду (1), побудованого за допомогою методу найменших квадратів, на кожному елементі розбиття $\mathrm{TP}_{ij}^{(1)}$, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$, справедлива така оцінка:

$$\|Sp(x,y)\|_\infty \le \max\{|f(x_i,y_j)|, |f(x_{i+1},y_j)|, |f(x_i,g_{j+1}^{(1)}(x_i))|, |f(x_{i+1},g_{j+1}^{(1)}(x_{i+1}))|\}+Q,$$

$$Q=\|f(x,y)\|_{L_\infty[x_i,x_{i+1}]\times[y_j,y_{j+1}(x)]}\cdot\frac{(x_{i+1}-x_i)^2}{64}\times \qquad (3)$$

$$\times\max\left\{(y_j-y_{j+1}(x_i))^2, (y_j-y_{j+1}(x_{i+1}))^2\right\}+$$

$$+\max\left\{\|f^{(0,2)}(x_i,y)\|_{L_\infty[y_j,y_{j+1}(x)]}\cdot\frac{(y_{j+1}(x_i)-y_j)^2}{8},\right.$$

$$\left.\|f^{(0,2)}(x_{i+1},y)\|_{L_\infty[y_j,y_{j+1}(x)]}\cdot\frac{(y_{j+1}(x_{i+1})-y_j)^2}{8}\right\}+$$

$$+\max\left\{\|f^{(2,0)}(x,y_j)\|_{L_\infty[x_i,x_{i+1}]}\cdot\frac{(x_{i+1}-x_i)^2}{8}, \|f^{(2,0)}(x,y_{j+1}(x))\|_{L_\infty[x_i,x_{i+1}]}\cdot\frac{(x_{i+1}-x_i)^2}{8}\right\}.$$

Доведення. Проведемо доведення на прикладі трапеції $\mathrm{TP}_{ij}^{(1)}$. Тоді формула (1) перетвориться у такий вираз:

$$S(x,y)=C_1^{(1)}\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}\frac{y-g_{j+1}^{(1)}(x)}{y_j-g_{j+1}^{(1)}(x)}+C_2^{(1)}\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\frac{y-g_{j+1}^{(1)}(x)}{y_j-g_{j+1}^{(1)}(x)}+$$

$$+C_3^{(1)}\frac{y-y_j}{g_{j+1}^{(1)}(x_i)-y_j}\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}+C_4^{(1)}\frac{y-y_j}{g_{j+1}^{(1)}(x_{i+1})-y_j}\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}.$$

Розв’яжемо мінімізаційну задачу:

$$P_{ij}(C)=\int_{x_i}^{x_{i+1}}\int_{y_j}^{g_{j+1}^{(1)}(x)}\left(C_1^{(1)}\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}\frac{y-g_{j+1}^{(1)}(x)}{y_j-g_{j+1}^{(1)}(x)}+C_2^{(1)}\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\frac{y-g_{j+1}^{(1)}(x)}{y_j-g_{j+1}^{(1)}(x)}+\right.$$

$$\left.+C_3^{(1)}\frac{y-y_j}{g_{j+1}^{(1)}(x_i)-y_j}\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}+C_4^{(1)}\frac{y-y_j}{g_{j+1}^{(1)}(x_{i+1})-y_j}\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}-f(x,y)\right)^2dxdy\to\min_C.$$

Вираз у дужках позначимо через $L(x,y,C)$.

Випишемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\frac{\partial P_{ij}(C)}{\partial C_1^{(1)}}=0,\ \frac{\partial P_{ij}(C)}{\partial C_2^{(1)}}=0,\ \frac{\partial P_{ij}(C)}{\partial C_3^{(1)}}=0,\ \frac{\partial P_{ij}(C)}{\partial C_4^{(1)}}=0$$

відносно невідомих $C_k^{(1)},\ k=1,2,3,4$:

$$\begin{cases}\int_{x_i}^{x_{i+1}}\int_{y_j}^{g_{j+1}^{(1)}(x)}2\big(L(x,y,C)-f(x,y)\big)\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}\frac{y-g_{j+1}^{(1)}(x)}{y_j-g_{j+1}^{(1)}(x)}dydx=0\\ \int_{x_i}^{x_{i+1}}\int_{y_j}^{g_{j+1}^{(1)}(x)}2\big(L(x,y,C)-f(x,y)\big)\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\frac{y-g_{j+1}^{(1)}(x)}{y_j-g_{j+1}^{(1)}(x)}dydx=0\\ \int_{x_i}^{x_{i+1}}\int_{y_j}^{g_{j+1}^{(1)}(x)}2\big(L(x,y,C)-f(x,y)\big)\frac{y-y_j}{g_{j+1}^{(1)}(x_i)-y_j}\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}dydx=0\\ \int_{x_i}^{x_{i+1}}\int_{y_j}^{g_{j+1}^{(1)}(x)}2\big(L(x,y,C)-f(x,y)\big)\frac{y-y_j}{g_{j+1}^{(1)}(x_{i+1})-y_j}\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}dydx=0\end{cases}\qquad(4)$$

У системі зробимо заміну

$$C_1^{(1)}=f\left(x_i+0,y_j+0\right)+\varepsilon_{i,j},\ C_2^{(1)}=f\left(x_{i+1}-0,y_j+0\right)+\varepsilon_{i+1,j},$$

$$C_3^{(1)}=f\left(x_i+0,g_{j+1}^{(1)}(x_i)-0\right)+\varepsilon_{i,j+1},\ C_4^{(1)}=f\left(x_{i+1}-0,g_{j+1}^{(1)}(x_{i+1})-0\right)+\varepsilon_{i+1,j+1}$$

і замінимо $f(x,y)$ інтерполяційним сплайном, побудованим на трапецієподібному елементі $\mathrm{TP}_{ij}^{(1)}$ із залишковим членом $R(x,y)$, який був виведений у роботі [8]. В результаті отримаємо такі вирази для інтегральних членів отриманої системи, беручи до уваги, що $g_{j+1}^{(1)}(x)=ax+b$.

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}}\int_{y_j}^{g_{j+1}^{(1)}(x)}\left(\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}\right)^2\left(\frac{y-g_{j+1}^{(1)}(x)}{y_j-g_{j+1}^{(1)}(x)}\right)^2 dxdy=\frac{(x_{i+1}-x_i)(4b-4y_j+3ax_i+ax_{i+1})}{36};$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}}\int_{y_j}^{g_{j+1}^{(1)}(x)}\frac{(x-x_i)(x-x_{i+1})}{(x_{i+1}-x_i)^2}\left(\frac{y-g_{j+1}^{(1)}(x)}{y_j-g_{j+1}^{(1)}(x)}\right)^2 dxdy==-\frac{(x_{i+1}-x_i)(2b-2y_j+ax_i+ax_{i+1})}{36};$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}}\int_{y_j}^{g_{j+1}^{(1)}(x)}\left(\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}\right)^2\frac{(y-y_j)(y-g_{j+1}^{(1)}(x))}{\left(g_{j+1}^{(1)}(x)-y_j\right)^2}dxdy=-\frac{(x_{i+1}-x_i)(4b-4y_j+3x_ia+ax_{i+1})}{72};$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}}\int_{y_j}^{g_{j+1}^{(1)}(x)}\frac{(x-x_i)(x-x_{i+1})}{(x_{i+1}-x_i)^2}\frac{(y-y_j)(y-g_{j+1}^{(1)}(x))}{\left(g_{j+1}^{(1)}(x)-y_j\right)^2}dydx=\frac{(x_{i+1}-x_i)(2b-2y_j+ax_i+ax_{i+1})}{72};$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}}\int_{y_j}^{g_{j+1}^{(1)}(x)}\left(\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\right)^2\left(\frac{y-g_{j+1}^{(1)}(x)}{y_j-g_{j+1}^{(1)}(x)}\right)^2 dxdy=\frac{4b-4y_j+3ax_i+ax_{i+1}}{12}\frac{x_{i+1}-x_i}{3};$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}}\int_{y_j}^{g_{j+1}^{(1)}(x)}\left(\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\right)^2\frac{(y-y_j)(y-g_{j+1}^{(1)}(x))}{\left(g_{j+1}^{(1)}(x)-y_j\right)^2}dxdy=\frac{(x_{i+1}-x_i)(4b-4y_j+ax_i+3ax_{i+1})}{36};$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}}\int_{y_j}^{g_{j+1}^{(1)}(x)}\left(\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}\right)^2\left(\frac{y-y_j}{g_{j+1}^{(1)}(x)-y_j}\right)^2 dxdy=\frac{(x_{i+1}-x_i)(4b-4y_j+3ax_i+ax_{i+1})}{36};$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}}\int_{y_j}^{g_{j+1}^{(1)}(x)}\frac{(x-x_i)(x-x_{i+1})}{(x_{i+1}-x_i)^2}\left(\frac{y-y_j}{g_{j+1}^{(1)}(x)-y_j}\right)^2 dxdy=-\frac{(x_{i+1}-x_i)(2b-2y_j+ax_i+ax_{i+1})}{36};$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}}\int_{y_j}^{g_{j+1}^{(1)}(x)}\left(\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\right)^2\left(\frac{y-y_j}{g_{j+1}^{(1)}(x)-y_j}\right)^2 dxdy=\frac{(x_{i+1}-x_i)(4b-4y_j+ax_i+3ax_{i+1})}{36}.$$

Система (4) тоді буде складатися з таких рівнянь:

$$1)\ \frac{4b-4y_j+3ax_i+ax_{i+1}}{12}\frac{x_{i+1}-x_i}{3}\varepsilon_{i,j}-\frac{x_{i+1}-x_i}{6}\frac{2b-2y_j+ax_i+ax_{i+1}}{6}\varepsilon_{i+1,j}-$$

$$-\frac{(x_{i+1}-x_i)(4b-4y_j+3x_ia+ax_{i+1})}{72}\varepsilon_{i,j+1}+\frac{(x_{i+1}-x_i)(2b-2y_j+ax_i+ax_{i+1})}{72}\varepsilon_{i+1,j+1}=$$

$$= \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{y_j}^{g_{j+1}^{(1)}(x)} R(x,y) \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} \frac{y - g_{j+1}^{(1)}(x)}{y_j - g_{j+1}^{(1)}(x)} dydx;$$

2) $$\frac{x_{i+1} - x_i}{6} \frac{2b - 2y_j + ax_i + ax_{i+1}}{6} \varepsilon_{i,j} + \frac{4b - 4y_j + 3ax_i + ax_{i+1}}{12} \frac{x_{i+1} - x_i}{3} \varepsilon_{i+1,j} +$$

$$+ \frac{(x_{i+1} - x_i)(2b - 2y_j + ax_i + ax_{i+1})}{72} \varepsilon_{i,j+1} + \frac{(x_{i+1} - x_i)(4b - 4y_j + ax_i + 3ax_{i+1})}{36} \varepsilon_{i+1,j+1} \Bigg) =$$

$$= \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{y_j}^{g_{j+1}^{(1)}(x)} R(x,y) \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \frac{y - g_{j+1}^{(1)}(x)}{y_j - g_{j+1}^{(1)}(x)} dydy;$$

3) $$\frac{(x_{i+1} - x_i)(4b - 4y_j + 3x_i a + ax_{i+1})}{72} \varepsilon_{i,j} + \frac{(x_{i+1} - x_i)(2b - 2y_j + ax_i + ax_{i+1})}{72} \varepsilon_{i+1,j} +$$

$$+ \frac{(x_{i+1} - x_i)(4b - 4y_j + 3ax_i + ax_{i+1})}{36} \varepsilon_{i,j+1} + \frac{(x_{i+1} - x_i)(2b - 2y_j + ax_i + ax_{i+1})}{36} \varepsilon_{i+1,j+1} =$$

$$= \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{y_j}^{g_{j+1}^{(1)}(x)} R(x,y) \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} \frac{y - y_j}{g_{j+1}^{(1)}(x) - y_j} dydx;$$

4) $$\frac{(x_{i+1} - x_i)(2b - 2y_j + ax_i + ax_{i+1})}{72} \varepsilon_{i,j} - \frac{(x_{i+1} - x_i)(4b - 4y_j + ax_i + 3ax_{i+1})}{36} \varepsilon_{i+1,j} +$$

$$+ \frac{(x_{i+1} - x_i)(2b - 2y_j + ax_i + ax_{i+1})}{36} \varepsilon_{i,j+1} + \frac{(x_{i+1} - x_i)(4b - 4y_j + ax_i + 3ax_{i+1})}{36} \varepsilon_{i+1,j+1} =$$

$$= \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{y_j}^{g_{j+1}^{(1)}(x)} R(x,y) \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} \frac{y - y_j}{g_{j+1}^{(1)}(x) - y_j} dydx.$$

Для аналізу правих частин отриманої системи скористаємося формулою з роботи [8]:

$$\left| f(x,y) - S(x,y) \right| \le Q,$$

де Q визначається формулою (3).

Використовуючи позначення $\|\varepsilon\| = \max\{\varepsilon_{i,j}, \varepsilon_{i+1,j}, \varepsilon_{i,j+1} + \varepsilon_{i+1,j+1}\}$ та спростивши отримані вирази, систему (4) перепишемо у вигляді

$$\begin{cases} \dfrac{(x_{i+1} - x_i)\left(3x_{i+1} - 3y_j + 2ax_i + ax_{i+1}\right)}{12} \|\varepsilon\| \le Q \cdot \dfrac{(x_{i+1} - x_i)(3x_{i+1} - 3y_j + 2ax_i + ax_{i+1})}{12}; \\ \dfrac{(x_{i+1} - x_i)(3x_{i+1} - 3y_j + ax_i + 2ax_{i+1})}{12} \|\varepsilon\| \le Q \cdot \dfrac{(x_{i+1} - x_i)(3x_{i+1} - 3y_j + ax_i + 2ax_{i+1})}{12}; \\ \dfrac{(x_{i+1} - x_i)\left(3x_{i+1} - 3y_j + 2ax_i + ax_{i+1}\right)}{12} \|\varepsilon\| \le Q \cdot \dfrac{(x_{i+1} - x_i)(3x_{i+1} - 3y_j + 2ax_i + ax_{i+1})}{12}; \\ \dfrac{(x_{i+1} - x_i)(3x_{i+1} - 3y_j + ax_i + 2ax_{i+1})}{12} \|\varepsilon\| \le Q \cdot \dfrac{(x_{i+1} - x_i)(3x_{i+1} - 3y_j + ax_i + 2ax_{i+1})}{12}; \end{cases}$$

Тобто $\|\varepsilon\| \le Q$.

Теорема доведена.

Наслідок. Якщо наближувана функція $f(x,y)$ є кусково-лінійною або кусково-сталою функцією в кожному трапецієподібному елементі розбиття з точками розриву $(x_i, y_j),\ i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}$ у випадку наближення її кусково-лінійним сплайном $S(x,y)$, визначеним формулами (1) з невідомими $C_m^{(k)}, m=\overline{1,4},\ k=\overline{1,8}$, що знаходяться з умови (2), то отримаємо точно наближувану функцію, тобто $S(x,y)=f(x,y)$, де $f(x,y)=A(const)$ або $f(x,y)=A_0+A_1x+A_2y+A_3xy$.

Зауваження. Якщо

$$C_1^{(1)}=C_1^{(2)}=C_1^{(3)}=C_1^{(4)}=S(x_i,y_j),\ i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n},$$

або

$$C_1^{(5)}=C_1^{(6)}=C_1^{(7)}=C_1^{(8)}=S(x_i,y_j),$$

то побудований розривний апроксимаційний сплайн вигляду (1) є неперервним лінійним апроксимаційним сплайном.

Приклад. Нехай задана функція на одиничному квадраті $[0,1]\times[0,1]$ (рис. 2):

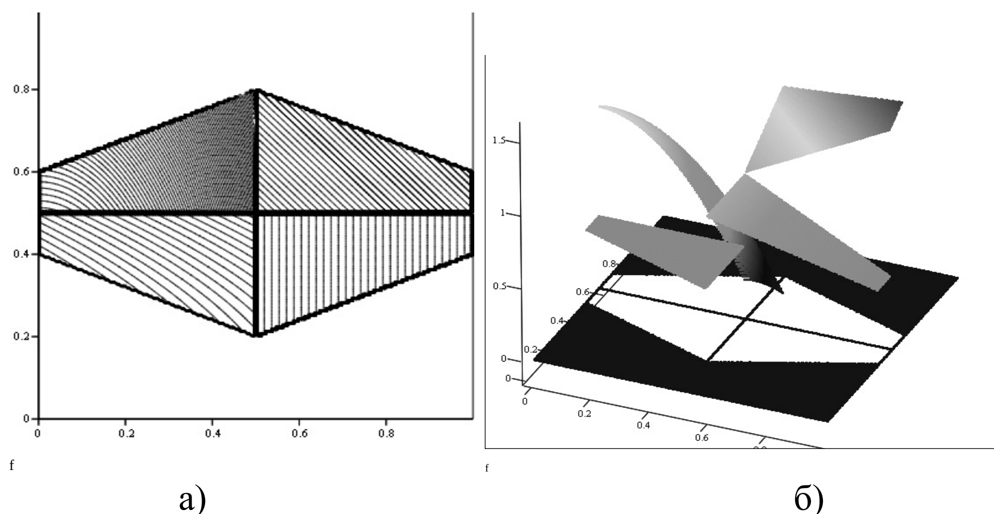
$$f(x,y)=\begin{cases} x+y, & 0.5<x<1,\ 0.5<y<-0.4x+1 \\ 1.5-4x^2-y^2, & 0<x<0.5,\ 0.5<y<0.4x+0.6 \\ 0.5, & 0<x<0.5,\ 0.4-0.4x<y<0.5 \\ -x+1.5, & 0.5<x<1,\ 0.4x<y<0.5 \end{cases}.$$

Тобто на лініях фігури, зображеної на рис. 2 а), функція $f(x,y)$ має розриви першого роду. Нехай задані лінії:

$$x_1=0, x_2=0.5, x_3=1,$$

$$y_1=-\frac{2}{5}x+1,\ \ y_2=\frac{2}{5}x+\frac{3}{5},\ \ y_3=\frac{2}{5}-\frac{2}{5}x,\ \ y_4=\frac{2}{5}x \qquad .$$

Вони розбивають область визначення функції $f(x,y)$ на вісім трапецієподібних елементів (один з кутів обов'язково є прямокутним).



а) б)

Рисунок 2 – Графічне зображення: а) області визначення функції $f(x,y)$;
б) функції $f(x,y)$

Спочатку побудуємо розривний інтерполяційний сплайн на заданій сітці, який, наприклад, для трапеції $\mathrm{TP}_{ij}^{(1)}$ задається формулою

$$S(x,y)=f(x_i,y_j)\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}\frac{y-g_{j+1}^{(1)}(x)}{y_j-g_{j+1}^{(1)}(x)}+f(x_{i+1},y_j)\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\frac{y-g_{j+1}^{(1)}(x)}{y_j-g_{j+1}^{(1)}(x)}+$$

$$+f(x_i,g_{j+1}^{(1)}(x_i))\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}\frac{y-y_j}{g_{j+1}^{(1)}(x)-y_j}+f(x_{i+1},g_{j+1}^{(1)}(x_{i+1}))\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\frac{y-y_j}{g_{j+1}^{(1)}(x)-y_j}.$$

Отримаємо інтерполяційний сплайн, графічний вигляд якого наведений на рис. 3.

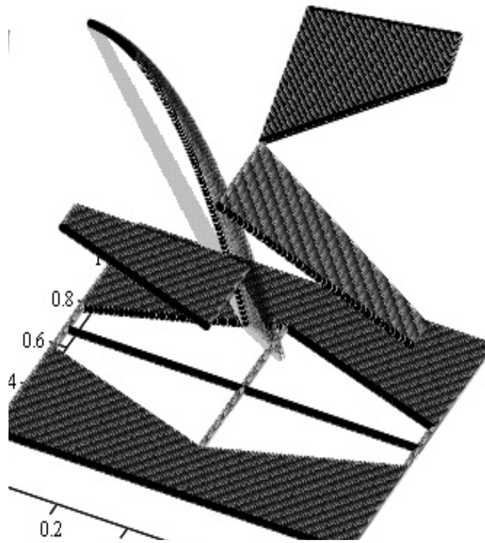


Рисунок 3 – Графічний вигляд розривного інтерполяційного сплайна (світлий колір) та заданої функції (темний колір)

Далі визначимо максимальне відхилення наближуваної функції $f(x,y)$ від побудованого сплайна $S(x,y)$:

$$\max\left|f(x,y)-S(x,y)\right|\approx 0.3.$$

Тепер побудуємо розривний апроксимаційний сплайн на заданій сітці, який, наприклад, для трапеції $\mathrm{TP}_{ij}^{(1)}$ задається формулою

$$S(x,y)=C_1^{(1)}\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}\frac{y-g_{j+1}^{(1)}(x)}{y_j-g_{j+1}^{(1)}(x)}+C_2^{(1)}\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\frac{y-g_{j+1}^{(1)}(x)}{y_j-g_{j+1}^{(1)}(x)}+$$

$$+C_3^{(1)}\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}\frac{y-y_j}{g_{j+1}^{(1)}(x)-y_j}+C_4^{(1)}\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\frac{y-y_j}{g_{j+1}^{(1)}(x)-y_j}.$$

Після знаходження коефіцієнтів цього сплайна з умови (2), отримаємо сплайн, наведений на рис. 4.

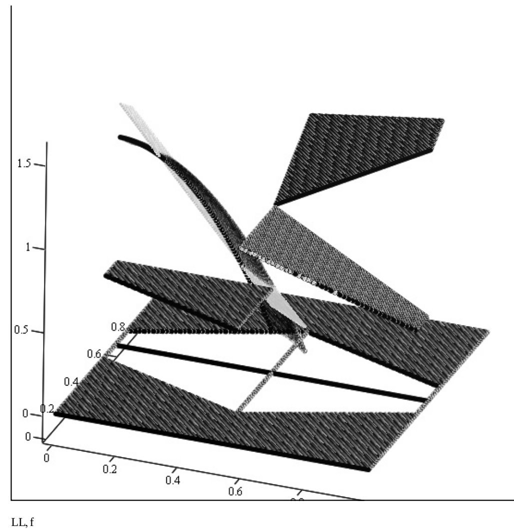


Рисунок 4 – Графічний вигляд розривного апроксимаційного сплайна (світлий колір) та заданої функції (темний колір)

Як на рис. 3, так і на рис. 4 бачимо, що задана функція наближується точно там, де вона задана константою або лінійною функцією (графіки функції $f(x,y)$ та наближуючих сплайнів точно збігаються).

Далі визначимо максимальне відхилення наближуваної функції $f(x,y)$ від побудованого сплайна $S(x,y)$:

$$\max\left|f(x,y)-S(x,y)\right|\approx 0.08\,.$$

Як бачимо, побудований розривний апроксимаційний сплайн наближує розривну функцію краще, ніж інтерполяційний. Побудовані розривні сплайни точно наближують ту частину функції, де вона є постійною або лінійною, що і підтверджує викладену вище теорію.

Висновки

У роботі пропонується метод побудови розривного апроксимаційного сплайна для наближення функції з розривами першого роду та область визначення яких розбита на прямокутні трапеції. Причому побудовані розривні сплайни включають в себе як частинний випадок класичні неперервні сплайни першого степеня на заданій сітці вузлів.

В подальшому авторами планується знайти оцінку похибки наближення побудованої розривної конструкції та застосувати розроблені методи до відновлення фантома Шепа-Логана в комп'ютерній томографії.

Література

1. Корнейчук Н.П. Сплайны в теории приближения / Корнейчук Н.П. – Москва : Наука, 1984. – 352 с.
2. Стечкин С.Б. Сплайны в вычислительной математике / С.Б. Стечкин, Ю.Н. Субботин. – М. : Наука, 1976.
3. Завьялов Ю.С. Методы сплайн-функций / Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. – М. : Наука, 1976.
4. Литвин О.М. Наближення розривної функції за допомогою розривних сплайнів / О.М. Литвин, Ю.І. Першина // Математичне та комп'ютерне моделювання. – Кам'янець-Подільський, 2010. – Вип. 3. – С. 122-131.
5. Литвин О.М. Побудова кусково-білінійних сплайнів для наближення функцій з розривами першого роду у вузлах ректангуляції двовимірної області / О.М. Литвин, Ю.І. Першина // Таврічний вісник інформатики та математики. – 2011. – № 1. – С. 63-72.

6. Литвин О.Н. Приближение разрывной функции двух переменных с помощью разрывных сплайнов двух переменных (прямоугольные элементы) / О.Н. Литвин, Ю.И. Першина // Компьютерная математика. – 2011. – № 1. – С. 96-105.
7. Литвин О.М. Наближення розривних функцій двох змінних з розривами на лініях тріангуляції двовимірної області за допомогою операторів сплайн-інтерлінації / О.М. Литвин, Ю.І. Першина // Інформатика та системні науки : матеріали ІІ Всеукраїнської науково-практичної конференції 17 – 19 березня 2011 р. – Полтава : РВВ ПУЕТ, 2011. – С. 178-181.
8. Відновлення розривної функції двох змінних за допомогою розривного інтерполяційного сплайна на трапецевидному елементі // Вісник Харківського національного університету (прийнято до друку).

Literatura

1. Kornejchuk N.P. Splajny v teorii priblizhenija. Moskva : Nauka. 1984. 352 s.
2. Stechkin S.B., Subbotin Ju.N. Splajny v vychislitel'noj matematike. M. : Nauka. 1976.
3. Zav'jalov Ju.S., Kvasov B.I. Miroshnichenko V.L. Metody splajn-funkcij. M. : Nauka. 1976.
4. Lytvyn O.M., Pershina Ju.I. Matematichne ta komp'juterne modeljuvannja. Kam'janec'-Podil's'kij. 2010. Vyp. 3. S. 122-131.
5. Lytvyn O.M., Pershina Ju.I. Tavrichnij visnyk informatyky ta matematyky. 2011. № 1. S. 63-72.
6. Litvin O.N., Pershina Ju.I. Komp'juternaja matematika. 2011. № 1. S. 96-105.
7. Litvin O.M., Pershina Ju.I. Informatyka ta systemni nauky: materialy II Vseukrains'koi naukovo-praktychnoi konferencii 17 – 19 bereznja 2011 r. Poltava : RVV PUET. 2011. S. 178-181.
8. Vidnovlennja rozryvnoi funkcii dvoh zminnih za dopomogoju rozryvnogo interpoljacijnogo splajna na trapecevydnomu element. Visnyk Harkivs'kogo nacional'nogo universytetu (pryjnjato do druku).

O.N. Lytvyn, Y.I. Pershina

Restoration of Discontinuous Functions by Discontinuous Approximational Splines with Use of Trapezes Elements

In the work, the problem of approach of discontinuous function of two variables in the area representing a unit square is considered. It is supposed, that the area breaks into rectangular trapezes, which are not put each other, and their parties are not crossed. Function has ruptures of the first sort on borders between these trapezes (not necessarily between all). In the article, it has been constructed discontinuous approximational polynomial spline, which coefficients are found by the method of the least squares, for approach of the set discontinuous function. The theorem of an estimation of the constructed discontinuous design on each element of splitting is proved. In the work, conditions, which approximational discontinuous spline is continuous at, are resulted, that is the general theory of approach of the set functions which special case is all the known theory of approach by classical continuous splines is developed. The example of approach the function of two variables by inerpolational discontinuous spline has been developed by authors before, and constructed in the article approximational discontinuous spline is resulted. The received results of approach are also analyzed. The set example also confirms the theory stated in article.

The developed method of approach assumes, that function ruptures are known, and they coincide with knots discontinuous approximational spline. The authors plan later to develop methods of approach of discontinuous functions with unknown ruptures, and to apply the developed methods to the decision of a two-dimensional problem computer of tomography, namely, to restoration of known Shepp-Logan phantom. The offered approach can be used for mathematical modelling of discontinuous processes in medical, geological, space and other researches.

Стаття надійшла до редакції 02.12.2011.